Exercice 1 (2,5 points) :

0,5 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$

1 b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$

1 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

Exercice 2 (4 points) :

1 **1)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) :\ z^2 - 6z + 18 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,,\vec{e_1}\,,\vec{e_2})$ les points A et B d'affixes respectives $a = 3 + 3i \quad et \quad b = 3 - 3i$

0,5 a) Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombre a et b

0,75 b) Montrer que l'affixe de l'image B' su point B par la translation T de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est b' = 6

1 c) Montrer que : $\frac{b-b'}{a-b'} = i$. Et en déduire que le triangle ABB' est isocèle et rectangle en B'

0,75 d) Déduire de ce qui précède que le quadruplet OAB'B est carré

Exercice 3 (3,5 points) :

1) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ,\quad u_{n+1} = \frac{6u_n}{1+15u_n}$

0,5 a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \ ,\quad u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}$

0,5 b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \ ,\quad u_n > \frac{1}{3}$

2) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \ ,\quad v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$

1,5 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$, puis écrire v_n en fonction de n

1 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \ ,\quad u_n = \frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4 (9,5 points) :

I. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln(x)$

0,5 1) a) Montrer que : $\forall x \in\ ]0,+\infty[\ ,\quad g'(x) = \frac{x+1}{x}$

0,5 b) Montrer que g est croissante sur $]0,+\infty[$

1 2) En déduire que : $\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ g(x) \geq 0 \ et \ \ \forall x \in\ ]0,1] \ ,\ g(x) \leq 0$ (remarque que : g(1) = 0)

II. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln(x)$ et on désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm

0,75	1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter graphiquement le résultat
1	b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (remarque que cc $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln(x)$)
0,5	c) En déduire que (C_f) admet une branche parabolique en $+\infty$ dont on précisera la direction
1	2) a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
0,5	b) En déduire que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$
0,25	c) Dresser le tableau d variations de f sur $]0,+\infty[$
1	3) Tracer la courbe (C_f) (on admet que (C_f) admet un point d'inflexion unique dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2)
0,5	4) a) Montrer que : $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ est une primitive de la fonction $H : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0,+\infty[$
0,75	b) Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}$
1	c) En intégrant par parties, montrer que : $\int_1^e \ln(x)\,dx = 1$
0,25	5) a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad f(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$
0,5	b) Montrer que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ *et* $x = e$ est $0{,}5\ \text{cm}^2$